GUIA N° 8 – MATEMÁTICA SEGUNDOS MEDIOS
FUNCIÓN CUADRÁTICA N°1

OA3:

- Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$
- Reconocer la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ en situaciones de la vida diaria y otras asignaturas.
- Representar en tablas y gráficos de manera manual y/o con software educativo.
- Determinar puntos especiales de su gráfica.

INSTRUCCIONES.

- **Lee atentamente cada una de las definiciones y analiza los ejercicios resueltos. Luego aplica.**
- **Desarrolla todas las actividades en tú cuaderno.**
- **Si tienes dudas consulta al correo tu profesor:**

Claudia Méndez → claudia.mendez@politecnicosanluis.cl
Raúl Correa → raul.correa@politecnicosanluis.cl
Alicia Cifuentes → alicia.cifuentes@politecnicosanluis.cl

Alicia Cifuentes- Claudia Méndez

FUNCION CUADRATICA

NOMBRE:____CURSO:____FECHA:___/___/

NOMBRE PROFESOR:____.

Objetivos:

Reconocer factores en una función Cuadrática.

Definición:
Una Función cuadrática es una función que modela diferentes situaciones de la vida real, por ejemplo:

- La trayectoria del lanzamiento de una pelota hacia delante al rebotar.
- La trayectoria del lanzamiento de un proyectil.
- La trayectoria del salto de un delfín, etc.

Su forma analítica es:

$$f_{(x)} = ax^2 + bx + c$$

Con $a, b\ y\ c\quad coeficientes\ numericos$ y $a \neq 0$

Ejemplo: Determine los coeficientes numéricos de la siguiente función:

a) $f_{(x)} = x^2 + 6x + 8$

Resolución:

- $a\ es\ el\ coeficiente\ numerico\ que\ acompaña\ siempre\ a\ x^2,$
  $por\ lo\ tanto\ en\ este\ caso\ \ a\ es = 1$
- $b\ es\ el\ coeficiente\ numerico\ que\ acompaña\ siempre\ a\ \ x,$
  $por\ lo\ tanto\ en\ este\ caso\ b\ es = 6$
- $c\ es\ el\ coeficiente\ numerico\ que\ se\ encuentra\ solo,$
  $por\ lo\ tanto\ en\ este\ caso\ c\ es = 8$

b) $\boldsymbol{f(x) = 1 - 2x + x^2}$

Resolución:
Si te complica definir el valor de cada coeficiente, ya que la función no tiene el mismo orden, entonces en primer lugar:

- te sugiero ordenar la función, es decir dejarla de la forma $f_{(x)} = ax^2 + bx + c$

$$\mathrm{f_{(x)}} = 1 - 2\mathrm{x} - \mathrm{x}^2 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 1$$

- $a\ es\ el\ coeficiente\ numerico\ que\ acompaña\ siempre\ a\ x^2,$
  $por\ lo\ tanto\ en\ este\ caso\ es = -1$
- $b\ es\ el\ coeficiente\ numerico\ que\ acompaña\ siempre\ a\ \ x,$
  $por\ lo\ tanto\ en\ este\ caso\ es = -2$
- $c\ es\ el\ coeficiente\ numerico\ que\ se\ encuentra\ solo,$
  $por\ lo\ tanto\ en\ este\ caso\ es = 1$

<u>**Actividad N°1**</u>

Reconoce el valor de cada uno de los coeficientes numéricos de las siguientes funciones cuadráticas:

1) $f_{(x)} = 4x^2 + 12x + 9$ $a =$ $\quad\quad$ $, b =$ $\quad\quad$ $, c =$	2) $f_{(x)} = x^2 - 10x + 25$
3) $f_{(x)} = -9x^2 - 6x - 1$	4) $f_{(x)} = x^2 + 3x$
5) $f_{(x)} = 4x^2$	6) $f_{(x)} = -2x^2 + 16x$
7) $f_{(x)} = 3x^2 + 4x$	8) $f_{(x)} = \frac{x^2}{2} + 5$
9) $f_{(x)} = -7x^2$	10) $f_{(x)} = \frac{x^2}{4} + 5x + 25$

Grafica de una Función Cuadrática

Objetivo2: Analizar y graficar una función cuadrática.

La representación gráfica de una función cuadrática es una curva llamada PARABOLA, la cual presenta ciertas características comunes a todas ellas.

¿Qué es o como es una Parábola?
Si observas el lanzamiento de una pelota a un arco de basquetbol o el lanzamiento de un proyectil veras que su trayectoria forma una curva…… a esta curva se denomina "parábola".

- **Graficaremos mediante la confección de una tabla de valores:**

- **Se tiene que:** $f_{(x)} = x^2 + 6x + 8$

- **En primer lugar, daremos valores a "x"**

x	-5	-4	-3	-2	-1
$f_{(x)}$					

- **Buscamos que valor toma $f_{(x)}$ para cada uno de los valores dados y completamos la tabla de valores:**

$$\begin{aligned} f_{(-5)} &= (-5)^2 + 6(-5) + 8 \\ &= 25 - 30 + 8 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{(-4)} &= (-4)^2 + 6(-4) + 8 \\ &= 16 - 24 + 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

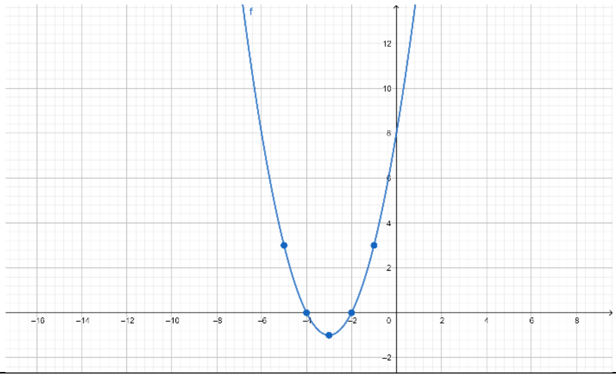
$$\begin{aligned} f_{(-3)} &= (-3)^2 + 6(-3) + 8 \\ &= 9 - 18 + 8 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{(-2)} &= (-2)^2 + 6(-2) + 8 \\ &= 4 - 12 + 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{(-1)} &= (-1)^2 + 6(-1) + 8 \\ &= 1 - 6 + 8 \\ &= 3 \end{aligned}$$

x	$f_{(x)}$
-5	3
-4	0
-3	-1
-2	0
-1	3

En el Plano Cartesiano ubicamos cada uno de los puntos obtenidos y unimos para obtener la curva:



"La curva resultante es una Parábola, que tiene sus ramas hacia arriba y corta al eje "y" en el punto (0,8)".

- **Se tiene** $f_{(x)} = -x^2 - 2x + 1$
- **damos valores a "x"**

x	-3	-2	-1	0	1
$f_{(x)}$					

- **Buscamos que valor toma** $f_{(x)}$ **para cada uno de los valores dados y completamos la tabla de valores:**

$$\begin{aligned} f_{(-3)} &= -(-3)^2 - 2(-3) + 1 \\ &= -9 + 6 + 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{(-2)} &= -(-2)^2 - 2(-2) + 1 \\ &= -4 + 4 + 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{(-1)} &= -(-1)^2 - 2(-1) + 1 \\ &= -1 + 2 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

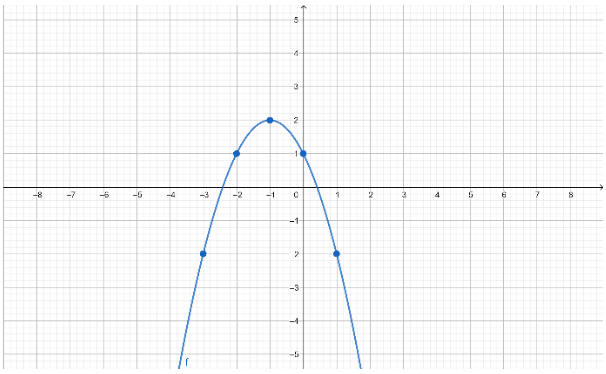
$$\begin{aligned} f_{(0)} &= -(0)^2 - 2(0) + 1 \\ &= -0 - 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{(1)} &= -(1)^2 - 2(1) + 1 \\ &= -1 - 2 + 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

x	$f_{(x)}$
-3	-2
-2	-1
-1	2
0	1
1	-2

Alicia Cifuentes- Claudia Méndez

- **Ubicamos en el plano cartesiano los puntos obtenidos:**



"La curva resultante es una Parábola, que tiene sus ramas hacia abajo y corta al eje "y" en el punto (0,1)".

__**Actividad N°2**__

Grafica las siguientes funciones cuadráticas confeccionando una tabla de valores:

1) $f_{(x)} = x^2 - 2x + 1$	2) $g_{(x)} = -x^2 - 2x - 1$
3) $h_{(x)} = -2x^2 + x + 3$	4) $j_{(x)} = x^2 - 5x + 6$

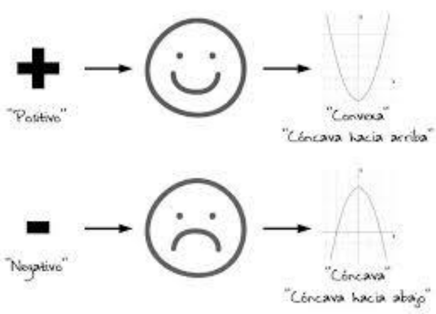
Luego de graficar ¿que puedes concluir?

Grafica de Función Cuadrática mediante Formulas

Al desarrollar la actividad anterior pudiste ver que los factores numéricos de la función están directamente relacionados con su gráfica. Por lo tanto, al graficar una función cuadrática debemos tener en cuenta varios conceptos:

a) En la función: $f_{(x)} = ax^2 + bx + c$

El factor "a" nos indica la dirección de la Parábola:

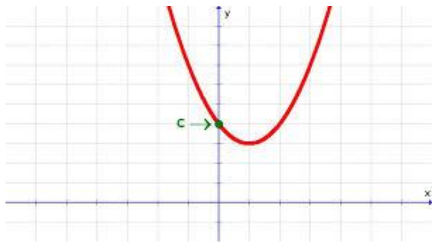


- Si $a > o$;(a es $positivo$)
  La Parábola es Cóncava hacia arriba, es decir, sus ramas o brazos se orientan hacia arriba.

- Si $a < o$;(a es $negativo$)
  La Parábola es Cóncava hacia abajo, es decir, sus ramas o brazos se orientan hacia abajo.

b) En la función: $f_{(x)} = ax^2 + bx + c$

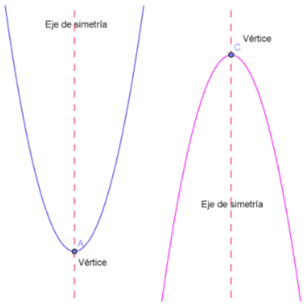
El factor "c" nos indica donde la parábola corta al eje de la Ordenada (eje "y"). Este punto se denota como $(0, c)$



c) En la función: $f_{(x)} = ax^2 + bx + c$
Siempre existe un punto máximo o un punto mínimo y este está dado por el punto vértice de la Parábola; el cual se obtiene:

$$V_{(x,y)} = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right) \quad \text{ó} \quad V_{(x,y)} = \left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

Toda función cuadrática posee un **EJE DE SIMETRIA,** que es una recta vertical que divide a la parábola en dos mitades congruentes, el eje de simetría siempre pasa a través del vértice de la parábola.



Ejercicio Resuelto:

Graficar $\boldsymbol{f_{(x)} = x^2 + 6x + 8}$

(Fíjate que es la misma función que graficamos anteriormente)

- **En primer lugar, identificamos los factores numéricos:**

$$\boldsymbol{a = 1} \qquad \boldsymbol{b = 6} \qquad \boldsymbol{c = 8}$$

- **Analizamos el factor "$\boldsymbol{a}$" : Como $\boldsymbol{a = 1}$, entonces $\boldsymbol{a > 0}$, lo que significa que la parábola es cóncava hacia arriba.**
- **Ahora vemos el valor de "$\boldsymbol{c}$" , para determinar el punto (0, C), en esta función $\boldsymbol{c = 8}$, lo que significa que la Parábola corta o interseca al eje "y" en el punto (0,8)**

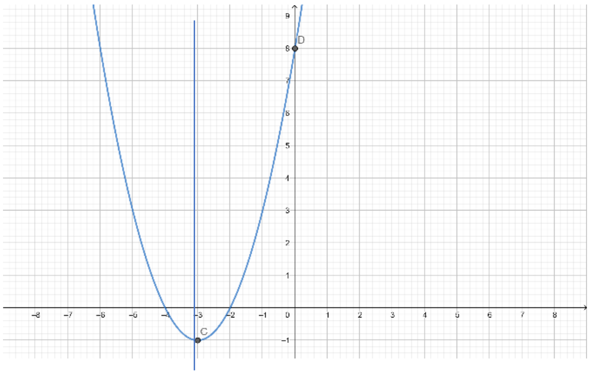
- **Como ya sabemos la parábola es cóncava hacia arriba por lo que tiene un punto mínimo, que está dado por el vértice, por lo que calcularemos sus coordenadas(x, y):**

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(1)} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$y = f_{\left(\frac{-b}{2a}\right)} = f_{(-3)} = (-3)^2 + 6(-3) + 8 = 9 - 18 + 8 = -1$$

Por lo tanto, el vértice de la parábola es: $(-3; -1)$

- **Ahora graficamos llevando todos los puntos obtenidos al plano cartesiano:**



"Si comparas es la misma grafica"

Ahora te toca a ti

Actividad 3:

Mediante el mismo análisis grafica las siguientes funciones:

1) $f_{(x)} = 4x^2 + 12x + 9$	2) $f_{(x)} = -9x^2 - 6x - 1$
3) $f_{(x)} = -2x^2 + 16x$	4) $f_{(x)} = x^2 + 3x$
5) $f_{(x)} = 4x^2$	6) $f_{(x)} = \frac{x^2}{2} + 5$

Alicia Cifuentes- Claudia Méndez

Ceros o Raíces de la función

<u>Objetivo 3</u>: Aplicar resolución de ecuación de segundo grado para encontrar las raíces en una función cuadrática

- **Los ceros o raíces de una función son los valores de la variable "x" para los cuales $f_{(x)} = 0$. Y nos muestra los puntos donde la parábola corta o interseca al eje "x"**

$$f_{(x)} = ax^2 + bx + c = 0$$

- **Al igualar la función a 0 tenemos una ecuación de segundo grado:**

$ax^2 + bx + c = 0$	$=$	**Ecuación de segundo grado**

- Al resolver una ecuación de segundo grado encontraremos los ceros o raíces de la Función (intersecciones con el eje X), se resuelve utilizando la formula general:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

<u>Ejercicio Resuelto:</u>

Se tiene $f_{(x)} = x^2 + 6x + 8$. Encuentre en que puntos la Parábola corta al eje "x"

- **En primer lugar, debemos reconocer el valor de los factores a, b, c:**

$a = 1$ $\qquad$ $b = 6$ $\qquad$ $c = 8$

- **Reemplazamos los valores numéricos en la fórmula:**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2}$$

Tenemos $\pm$

Los separamos y obtendremos dos operaciones. Como lo indican las flechas, y por ende dos valores para "x"

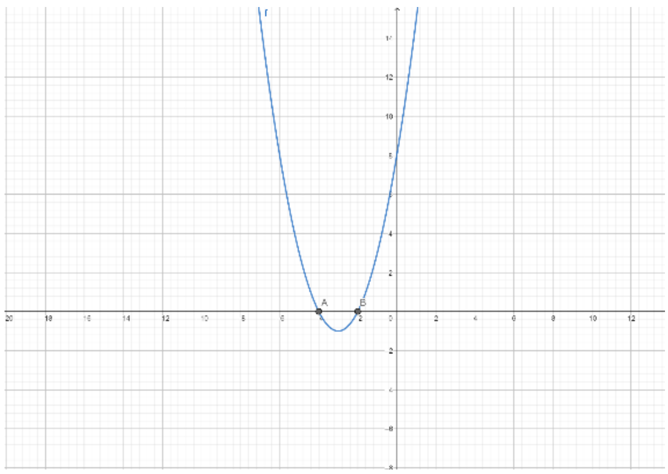
$$x = \frac{-6 \pm 2}{2}$$

$$x_{(1)} = \frac{-6+2}{2} \qquad x_{(2)} = \frac{-6-2}{2}$$

$$x_{(1)} = \frac{-4}{2} \qquad x_{(2)} = \frac{-8}{2}$$

$$x_{(1)} = -2 \qquad x_{(2)} = -4$$

- **Una vez obtenidos los valores de "x" los puntos de intersección son $(-2, 0)$ y $(-4, 0)$**



Como te habrás dado cuenta la función: $f_{(x)} = x^2 + 6x + 8$, la hemos trabajado en anteriormente, por lo tanto, si volvemos atrás tenemos que:

- **Concavidad de la Parábola:**
  Como $a = 1$, entonces $a > 0$, lo que significa que la parábola es cóncava hacia arriba.

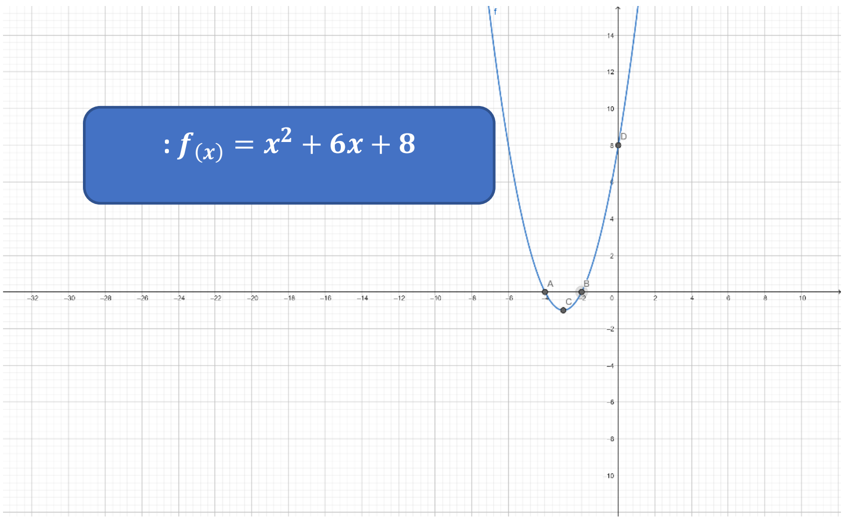
- **Corte de la Parábola con eje y:** $(0, C) = (0, 8)$

- **Vértice de la Parábola:** $V_{(x,y)} = \left(\frac{-b}{2a}; f_{\left(\frac{-b}{2a}\right)}\right)$
  $= (-3; -1)$

- **Corte con eje "x" =**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$=(-2, 0)\ y\ (-4, 0)$

- **Ahora Llevamos Todos estos datos al plano cartesiano y obtenemos la Parábola con todos sus puntos:**



Actividad 4:

Grafica cada una de las siguientes Funciones cuadráticas e indica e identifica cada uno de los puntos.

1) $f_{(x)} = -x^2 + 5x - 4$	2) $g_{(x)} = 2x - 5x^2 + 1$
3) $h_{(x)} = 4 - (x^2 + 2x + 4)$	4) $m_{(x)} = 2x^2 - 4x$